МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 624.04 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-2-114-122



Расчет на устойчивость деревянных арок с учетом нелинейной ползучести

С. Б. Языев[1], В. И. Андреев[2], А. С. Чепурненко[1]
[1]ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)
[2]ФГБОУ ВО «Московский государственный строительный университет» (г. Москва, Российская Федерация)

Введение. В статье рассматриваются вопросы расчета деревянных арок с учетом нелинейной зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями, а также ползучести и геометрической нелинейности. В основу положено интегральное уравнение вязкоупругопластической модели наследственного старения, изначально предложенное А. Г. Тамразяном [1] для описания нелинейной ползучести бетона.

Материалы и методы. Мера ползучести принимается в соответствии с работой И. Е. Прокоповича и В. А. Зедгенидзе [2] в виде суммы экспоненциальных функций. Показан переход от интегральной формы закона ползучести к дифференциальной. Связь между напряжениями и мгновенными деформациями для древесины при сжатии определяется формулой Герстнера, при растяжении принимается упругая работа. Решение выполняется при помощи метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона-Рафсона и методом Эйлера по схеме ступенчатого увеличения нагрузки с корректировкой матрицы жесткости с учетом изменения координат узлов с последовательным вычислением дополнительных перемещений узлов, которые обусловлены невязкой сил. Предложенный подход для повышения точности определения деформаций ползучести на каждом шаге допускает вместо метода Эйлера использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Результаты исследования. На основе вариационного принципа Лагранжа получены выражения для матрицы жесткости и вектора дополнительных фиктивных нагрузок, обусловленных ползучестью. Разработанная авторами методика реализована в виде программы в среде MATLAB. Приведены примеры расчета для шарнирно опертых по концам параболических арок без промежуточного шарнира и с промежуточным шарниром в середине пролета под действием равномерно распределенной нагрузки. Выполнено сравнение результатов, получаемых в вязкоупругопластической и вязкоупругой постановке. Достоверность результатов подтверждена расчетом в упругой постановке в программном комплексе ANSYS.

Обсуждение и заключения. Для рассмотренных арок установлено, что даже при нагрузке, близкой к мгновенной критической, рост перемещений во времени носит ограниченный характер. Таким образом, характер их работы в условиях ползучести сильно отличается от характера деформирования сжатых стержней.

Ключевые слова: ползучесть, деревянная арка, геометрическая нелинейность, вязкоупругопластичность, метод конечных элементов.

Для цитирования: Языев, С. Б. Расчет на устойчивость деревянных арок с учетом нелинейной ползучести / С. Б. Языев, В. И. Андреев, А. С. Чепурненко // Advanced Engineering Research. — 2021. — Т. 21, № 2. — С. 114–122. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-2-114-122



Stability analysis of wooden arches with account for nonlinear creep

S. B. Yazyev[1], V. I. Andreev[2], A. S. Chepurnenko[1]
[1] Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)
[2] Moscow State University of Civil Engineering (Moscow, Russian Federation)

Introduction. The paper deals with the calculation of wooden arches taking into account the nonlinear relationship between stresses and instantaneous deformations, as well as creep and geometric nonlinearity, are considered. The analy-

sis is based on the integral equation of the viscoelastoplastic hereditary aging model, originally proposed by A.G. Tamrazyan [1] to describe the nonlinear creep of concrete.
Materials and Methods. The creep measure is taken in accordance with the work of I.E. Prokopovich and V.A. Zedgenidze [2] as a sum of exponential functions. The transition from the integral form of the creep law to the differential form is shown. The relationship between stresses and instantaneous deformations for wood under compression is determined from the Gerstner formula, and elastic work is assumed under tension. The solution is carried out using the finite element method in combination with the Newton-Raphson method and the Euler method according to the scheme that involves a stepwise increase in the load with correction of the stiffness matrix taking into account the change in the coordinates of the nodes with the sequential calculation of additional displacements of the nodes, which are due to the residual forces. The proposed approach for increasing the accuracy of determination of creep deformations at each step provides using the fourth-order Runge-Kutta method instead of the Euler method.
Results. Based on the Lagrange variational principle, expressions are obtained for the stiffness matrix and the vector of additional dummy loads due to creep. The method developed by the authors is implemented in the form of a program in the MATLAB environment. Calculation examples are given for parabolic arches simply supported at the ends without an intermediate hinge and with an intermediate hinge in the middle of the span under the action of a uniformly distributed load. The results obtained are compared in the viscoelastic and viscoelastic formulation. The reliability of the results is validated through the calculation in the elastic formulation in the ANSYS software package.
Discussion and Conclusions. For the arches considered, it is found that even with a load close to the instant critical, the growth of time travel is limited. Thus, the nature of their work under creep conditions differs drastically from the nature of the deformation of compressed rods.

Keywords: creep, wooden arch, geometric nonlinearity, viscoelastic plasticity, finite element method.

For citation: S. B. Yazyev, V. I. Andreev, A. S. Chepurnenko. Stability analysis of wooden arches with account for nonlinear creep. Advanced Engineering Research, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 114–122. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-2-114-122

Введение. Древесина относится к материалам, проявляющим свои нелинейные свойства, как при кратковременных, так и длительных воздействиях. Большинство существующих реологических моделей дерева устанавливает его мгновенные свойства на основе закона Гука, однако для сжатой древесины характерна нелинейная диаграмма упругопластического типа [3]. Впервые вопросы совместного учета мгновенных упругопластических свойств древесины и ее ползучести стал исследовать К. П. Пятикрестовский. Указанные свойства он объединил на основе метода длительного модуля деформации [4–7]. В данном методе уравнение ползучести содержит время в явном виде, что существенно ограничивает его использование в случае сложных режимов нагружения и переменных нагрузок. В литературе имеется значительное количество публикаций по совместному учету ползучести и мгновенной нелинейности деформирования древесины при расчете сжатых стержней [8–14]. В частности, в работе [8] рассматривается вопрос применимости к описанию нелинейной ползучести древесины принципа суперпозиции Больцмана. В работе [9] для сжатых стержней проводится сопоставление теоретических расчетов с экспериментальными данными, а в статье [10] помимо сжимающей продольной нагрузки учитывается поперечная нагрузка. В работах [11–13] задача устойчивости решается для стержневых элементов в составе рамной конструкции. В статье [14] для сжатых деревянных элементов выводится длительная критическая сила с учетом нелинейной ползучести.

Проблема расчета с учетом ползучести и мгновенной нелинейности деформирования актуальна не только для отдельно взятых стержней и рам, но и для таких стержневых систем, как арки. Целью настоящей работы является разработка методики расчета арочных конструкций с учетом нелинейных свойств материала при кратковременных и длительных воздействиях, а также геометрической нелинейности.

Материалы и методы. В качестве соотношения, определяющего связь между напряжениями и деформациями, воспользуемся уравнением вязкоупругопластической модели наследственного старения:

$$\varepsilon(t)=\frac{f\left[\sigma(t)\right]}{E_0(t)}-\int_{\tau_0}^{t} f\left[\sigma(\tau)\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \qquad (1)$$

Данное уравнение впервые было предложено в [1] для моделирования нелинейной ползучести бетона. Функция $f(\sigma)$ здесь устанавливает связь между напряжением и мгновенной деформацией, $C(t,\tau)$ — мера ползучести. Диаграмма напряжения-деформации сжатой древесины при кратковременном нагружении хорошо аппроксимируется формулой Герстнера [15], имеющей вид:

$$\sigma=E_0\varepsilon-\frac{E_0^2}{4R}\varepsilon^2. \qquad (2)$$

Сжимающие напряжения в формулу (2) подставляются со знаком «+». При растяжении для дерева имеет место линейная диаграмма вплоть до разрушения. Выразив из (2) деформацию через напряжение, получим:

$$\varepsilon = \frac{2R}{E_0}\left(1-\sqrt{1-\frac{\sigma}{R}}\right). \quad (3)$$

На основе (3) функцию напряжений $f(\sigma)$ можно записать в виде:

$$f(\sigma) = 2R\left(1-\sqrt{1-\frac{\sigma}{R}}\right). \quad (4)$$

Для меры ползучести древесины воспользуемся формулой, предложенной в работе В. А. Зедгенидзе и И. Е. Прокоповича [2]:

$$C(t,\tau) = \left(C_0 + A_0 e^{-\gamma\tau}\right)\left[1 - B_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right], \quad (5)$$

где $C_0 = 2{,}87\cdot10^{-5}$ МПа$^{-1}$, $A_0 = 10{,}95\cdot10^{-5}$ МПа$^{-1}$, $B_1 = 1$, $\gamma = \gamma_1 = 0{,}15$ сут $^{-1}$.

Уравнение (1) можно представить в форме:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^*, \quad (6)$$

где $E = \dfrac{E_0\sigma}{f(\sigma)}$ — секущий модуль, $\varepsilon^* = -\int_{\tau_0}^{t} f\left[\sigma(\tau)\right]\dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau$ — деформация ползучести.

Для меры ползучести в виде (5) деформацию ползучести можно записать в виде суммы двух составляющих:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*,\ \ \varepsilon_1^* = \gamma C_0 B_1 \int_{\tau_0}^{t} f\left[\sigma(\tau)\right]e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau\ ,\ \ \varepsilon_2^* = A_0\gamma\int_{\tau_0}^{t} f\left[\sigma(\tau)\right]e^{-\gamma\tau}d\tau\ . \quad (7)$$

Дифференцируя по времени (7), получим выражения для скоростей роста каждой составляющей:

$$\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial t} = \gamma\left(C_0 B_1 f\left[\sigma(t)\right] - \varepsilon_1^*\right);\ \ \frac{\partial\varepsilon_2^*}{\partial t} = A_0\gamma f\left[\sigma(t)\right]e^{-\gamma t}. \quad (8)$$

Выведем на основе (6) связь между внутренними усилиями и деформациями для элемента при совместном действии продольной силы и изгибающего момента. Модуль упругости будем предполагать функцией от координаты y, которая по высоте сечения меняется от $-h/2$ до $h/2$. На основе гипотезы плоских сечений полную деформацию запишем в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\chi, \quad (9)$$

где ε_0 — деформация среднего слоя, $\chi = -\dfrac{d^2v}{dx^2}$ — изменение кривизны.

Подставим далее (9) в (6). Выразив σ через ε, получим:

$$\sigma = E(y)\left(\varepsilon - \varepsilon^*\right) = E(y)\left(\varepsilon_0 + y\chi - \varepsilon^*\right). \quad (10)$$

Продольная сила и изгибающий момент в элементе связаны с напряжением через следующие интегральные зависимости:

$$M = \int_A \sigma y dA\ ;\ N = \int_A \sigma dA\ . \quad (11)$$

Здесь A — площадь поперечного сечения стержня.

Подставим (10) в (11) и преобразуем полученные равенства к матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \left[D\right]\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \chi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где $N^* = \int_A E(y)\varepsilon^*\delta A$, $M^* = \int_A E(y)y\varepsilon^* dA$, $\left[D\right] = \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix}$ — матрица приведенных жесткостей, которые определяются по формулам:

$$EA = \int_A E(y)\,dA,\ ES = \int_A E(y)\,ydA, EI = \int_A E(y)\,y^2dA\,. \quad (13)$$

Решение задачи с учетом физической и геометрической нелинейности авторами будет выполнено при помощи метода конечных элементов. Используется стержневой элемент, приведенный на рис. 1. Осевая деформация при учете геометрической нелинейности представляет сумму линейной и нелинейной составляющей:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2. \tag{14}$$

Рис. 1. Стержневой конечный элемент

Для получения системы уравнений МКЭ воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. Потенциальная энергия деформации (ПЭД) записывается в виде:

$$П = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon^{el} dV = \frac{1}{2}\int_V E(y)\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)^2 dV. \tag{15}$$

где ε^{el} — упругая деформация, равная разности между полной деформацией и деформацией ползучести.

Запишем (15) как сумму четырех интегралов:

$$\begin{gathered} П = \frac{1}{2}\left(\int_V E(y)\varepsilon_0^l\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV + \int_V E(y)\varepsilon_0^n\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV + \right. \\ \left. + \int_V E(y)\, y\chi\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV - \int_V E(y)\varepsilon^*\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV\right) \end{gathered} \tag{16}$$

Первый интеграл в (16) запишется в виде:

$$\begin{gathered} \int_V E(y)\varepsilon_0^l\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV = \int_0^l \varepsilon_0^l \int_A E(y)\left(\varepsilon_0^l + y\chi - \varepsilon^*\right)dAdx + \\ + \int_0^l \varepsilon_0^l \cdot \varepsilon_0^n \int_A E(y)\, dAdx = \int_0^l \varepsilon_0^l N dx + \int_0^l \varepsilon_0^l \cdot \varepsilon_0^n \cdot EAdx, \end{gathered} \tag{17}$$

где l — длина конечного элемента.

Второй интеграл в (16) представим в следующей форме:

$$\begin{gathered} \int_V E(y)\varepsilon_0^n\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV = \int_0^l \varepsilon_0^l \cdot \varepsilon_0^n \int_A E(y)\, dAdx + \int_V E(y)\left(\varepsilon_0^n\right)^2 dV + \\ + \int_0^l \varepsilon_0^n \cdot \chi \int_A E(y)\, ydAdx - \int_0^l \varepsilon_0^n \int_A E(y)\varepsilon^* dAdx, \end{gathered} \tag{18}$$

Вторым слагаемым в правой части (18) можно пренебречь, учитывая его более высокий порядок малости. Третий интеграл в (16) записывается в виде:

$$\begin{gathered} \int_V E(y)\, y\chi\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV = \int_0^l \chi \int_A E(y)\, y\left(\varepsilon_0^l + y\chi - \varepsilon^*\right)dAdx + \\ + \int_0^l \varepsilon_0^l \chi \cdot ESdx = \int_0^l M\chi dx + \int_0^l \varepsilon_0^n \chi \cdot ESdx. \end{gathered} \tag{19}$$

Четвертый интеграл в (16) представим в следующем виде:

$$\begin{gathered} \int_V E(y)\varepsilon^*\left(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*\right)dV = \int_0^l \chi \int_A E(y)\, y\varepsilon^* dAdx + \\ + \int_0^l \varepsilon_0^l \int_A \varepsilon^* E(y)\, dAdx - \int_V \left(\varepsilon^*\right)^2 E(y)\, dV + \int_0^l \varepsilon_0^n \int_A \varepsilon^* E(y)\, dAdx = \\ = \int_0^l \chi M^* dx + \int_0^l \varepsilon_0^l N^* dx + \int_0^l \varepsilon_0^n N^* dx - \int_V \left(\varepsilon^*\right)^2 E(y)\, dV. \end{gathered} \tag{20}$$

Слагаемое $\int_V (\varepsilon^*)^2 E(y)\, dV$ при минимизации по вектору узловых перемещений обратится в нуль. Окончательно выражение для ПЭД примет вид:

$$П = \frac{1}{2}\left(\int_0^l \varepsilon_0^l N dx + 2\int_0^l \varepsilon_0^l \varepsilon_0^n EAdx + \int_0^l M\chi dx + 2\int_0^l \varepsilon_0^n \chi ESdx - \int_0^l \chi M^* dx - \int_0^l \varepsilon_0^l N^* dx + \right. \tag{21}$$

$$+2\int_0^l \varepsilon_0^n N^* dx) = \frac{1}{2}\int_0^l \{\varepsilon_0^l \quad \chi\}\left(\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix}\right)dx + N_{av}\int_0^l \varepsilon_0^n dx,$$

где $N_{av} = \varepsilon_0^l EA + \chi_{av} ES - N^*$ — средняя продольная сила в элементе, χ_{av} — среднее изменение кривизны элемента.

С учетом (12) формула (21) примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \{\varepsilon\}^T \left([D]\{\varepsilon\} - 2\begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix}\right)dx + N_{av}\int_0^l \varepsilon_0^n dx \,, \qquad (22)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_0^l \quad \chi\}^T$.

Для перемещений конечного элемента примем следующую аппроксимацию:

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x; \qquad (23)$$

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3; \qquad (24)$$

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2. \qquad (25)$$

Коэффициенты полинома (24) определяются путем подстановки в (24) и (25) координат узлов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Из (26) вектор $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\}^T$ выражается следующим образом:

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = [\Phi]\{U\}. \qquad (27)$$

С учетом (27) формула (24) примет вид:

$$v = \{\Psi\}\{U\}, \qquad (28)$$

где $\Psi = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\}[\Phi]$.

Вектор $\{\varepsilon\}$ запишем в форме:

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d^2 v}{dx^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 \\ -\frac{d^2\{\Psi\}}{dx^2} & & & & & \end{bmatrix} \cdot \{U\} = [B]\{U\}. \qquad (29)$$

После подстановки (29) и (28) в (22) ПЭД запишется в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}\{U\}^T \int_0^l [B]^T [D][B]dx\{U\} - \{U\}^T \int_0^l [B]^T dx \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix} + \{U\}^T N_{av} \cdot \frac{1}{2}\int_0^l \frac{d\{\Psi\}^T}{dx}\frac{d\{\Psi\}}{dx}dx\{U\}. \qquad (30)$$

После минимизации функционала Лагранжа по вектору узловых перемещений приходим к системе уравнений следующего вида:

$$\left([K] + [K_g]\right)\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \qquad (31)$$

где $[K] = \int_0^l [B]^T [D][B]dx$ — матрица жесткости, $[K_g] = N_{av}\int_0^l \frac{d\{\Psi\}^T}{dx}\frac{d\{\Psi\}}{dx}dx$ — геометрическая матрица жесткости, $\{F^*\} = \int_0^l [B]^T dx \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix}$ — вклад в вектор нагрузки деформаций ползучести, $\{F\}$ — вектор внешних узловых сил.

Решение физически и геометрически нелинейной задачи осуществляется при помощи метода Ньютона-Рафсона. Первым этапом производится расчет при $t = 0$. Приращение нагрузки выполняется квазистатически небольшими порциями с последовательным вычислением дополнительных перемещений узлов, которые обусловлены невязкой сил, корректировкой на каждом шаге касательного модуля упругости и координат узлов.

Далее временной интервал, на котором выполняется расчет, разбивается на конечное число шагов по времени. Расчет на ползучесть выполняется аналогично расчету на статическую нагрузку. Приращение деформаций ползучести на шаге $t+\Delta t$ может быть определено с использованием метода Эйлера

$$\Delta\varepsilon^{*} = \left(\frac{\partial\varepsilon_1^{*}}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon_2^{*}}{\partial t}\right)\Delta t. \qquad (32)$$

Результаты исследования. Представленные уравнения и алгоритм расчета реализованы авторами в виде программы в среде Matlab. Был выполнен расчет шарнирно неподвижно опертой по концам арки параболического очертания под действием равномерно распределенной по длине нагрузки (рис. 2) при следующих исходных данных: E_0 = 1,48·10^4 МПа, R = 55 МПа, L = 16 м, f = 3,2 м. Поперечное сечение арки принималось прямоугольным с размерами b = 10 см, h = 15 см. Арка разбивалась по длине на 40 конечных элементов, по высоте сечение делилось на 100 отрезков, количество шагов по времени принималось равным 600, а по нагрузке — 200. Максимальное количество итераций на каждом шаге — 20. На рис. 3 показан график зависимости максимального прогиба от нагрузки. Штриховой линии соответствует расчет в упругой постановке. Для контроля правильности результатов решение упругой задачи также выполнялось в программном комплексе ANSYS с использованием стержневых конечных элементов BEAM 188. Количество конечных элементов принималось такое же, как и в Matlab. Существенной разницы результатов выявлено не было. При расчете в упругой постановке резкий рост перемещений, соответствующий потере устойчивости, наблюдается при q = 10,5кН/м, а при учете мгновенной нелинейности деформирования — при q = 10кН/м.

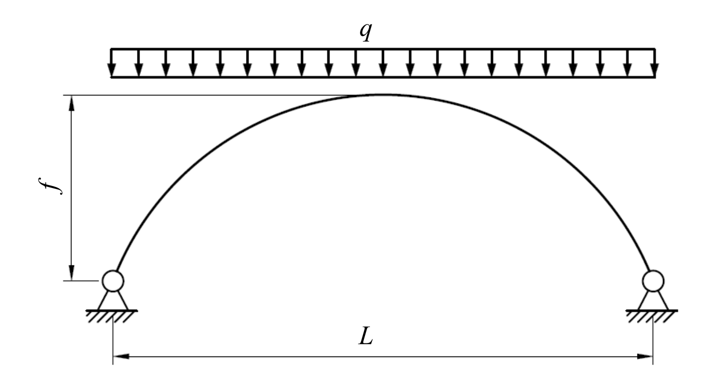


Рис. 2. Расчетная схема конструкции:
q — распределённая нагрузка на арку, f — стрела подъёма арки, L — пролет арки

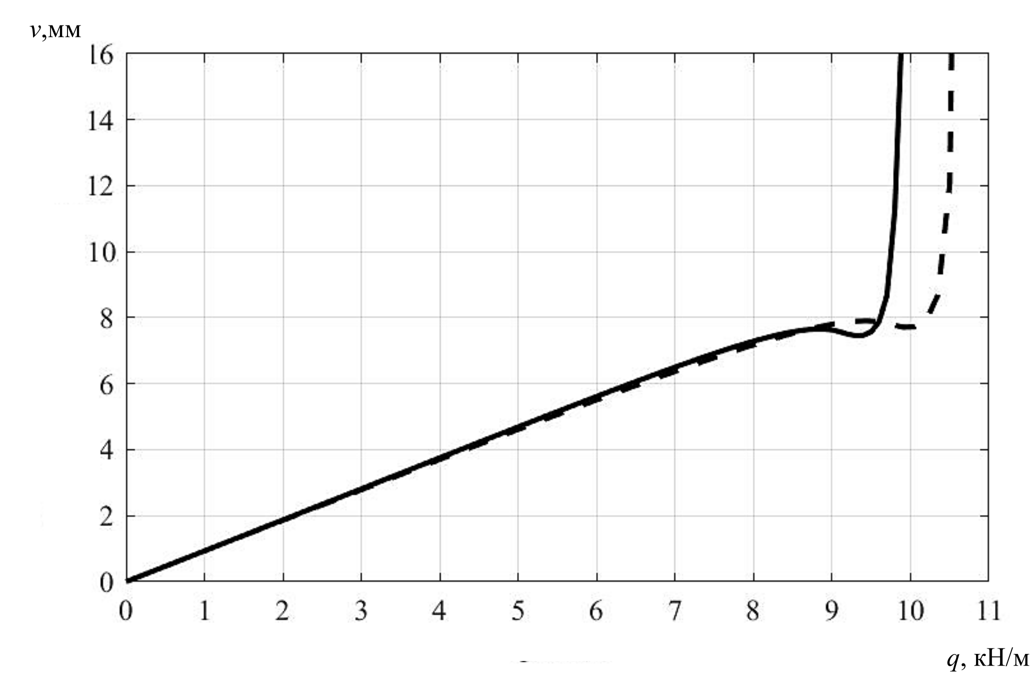


Рис. 3. Зависимость максимального прогиба арки от нагрузки при кратковременном нагружении

Расчет с учетом ползучести для данной арки показал, что даже при нагрузках, достаточно близких к мгновенной критической, рост перемещений носит ограниченный характер. На рис. 4 приведен график роста во времени прогиба в середине пролета при нагрузке q = 8кН/м. Штриховой линии на данном графике соответствует решение в вязкоупругой постановке. Существенной разницы в результатах не выявлено.

Также при указанных выше исходных данных был выполнен расчет трехшарнирной арки с промежуточным шарниром в середине пролета. В этом случае мгновенная критическая нагрузка оказалась существенно ниже. При расчете в упругой постановке она составила 4 кН/м, а с учетом мгновенной нелинейности деформирования — 3,3 кН/м. Как и в предыдущем примере, даже при нагрузке, достаточно близкой к мгновенной критической, ползучесть носит затухающий характер. Кривые изменения во времени максимального прогиба при q = 3кН/м приведены на рис. 5. Обозначения такие же, как и на предыдущем графике.

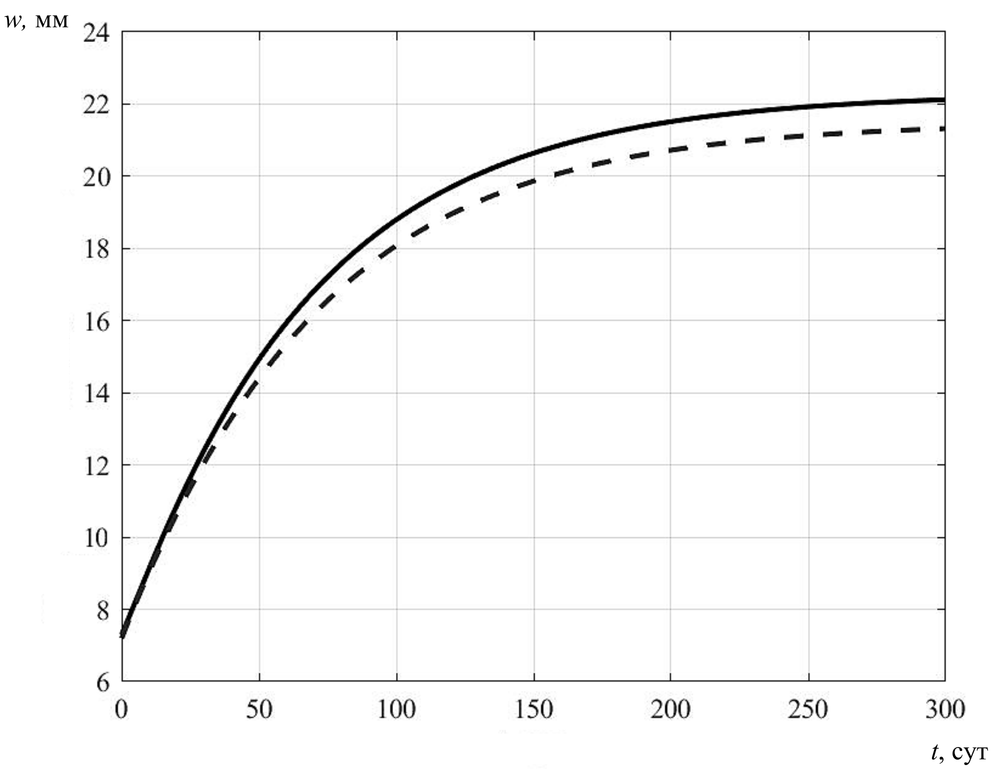


Рис. 4. Изменение прогиба в середине пролета во времени при нагрузке q = 8кН/м

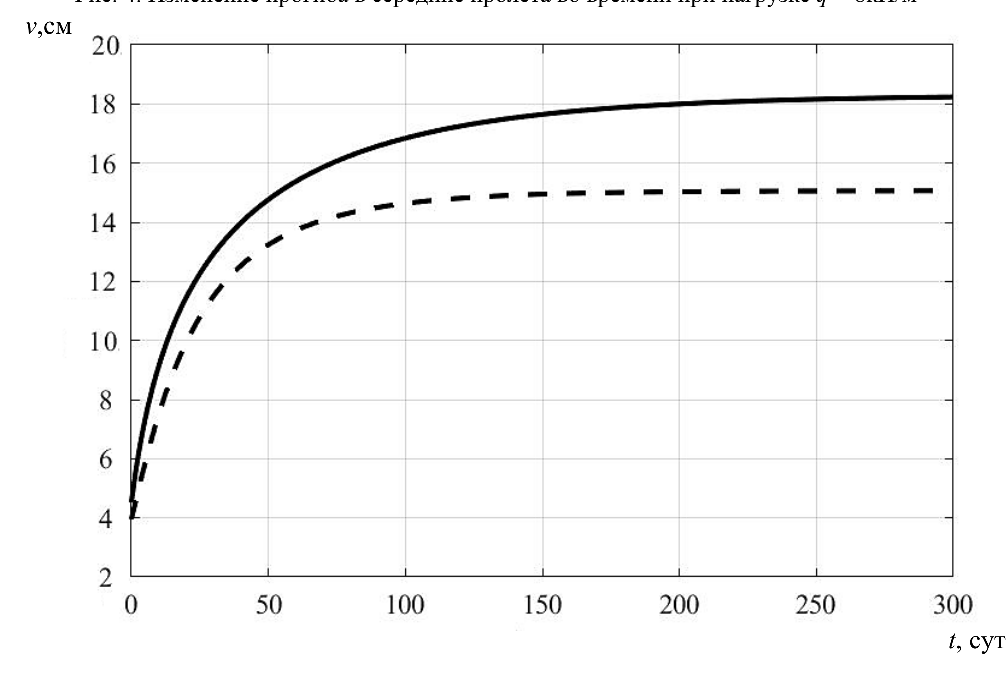


Рис. 5. Рост во времени максимального прогиба для арки с промежуточным шарниром в середине пролета при q = 3 кН/м

Обсуждение и заключения. Полученные уравнения и разработанная методика являются универсальными и допускают применение произвольных зависимостей между напряжениями и мгновенными деформации, а также произвольных выражений для меры ползучести. Это позволяет производить расчеты конструкций, изготовленных не только из дерева, но и из любого другого материала. В результате проведенного анализа ползучести деревянных арок установлено, что в отличие от сжатых стержней, для них ползучесть носит ограниченный характер даже при нагрузках, близких к мгновенной критической.

Библиографический список

1. Тамразян, А. Г. Механика ползучести бетона / А. Г. Тамразян, С. Г. Есаян. — Москва : МГСУ, 2011. — 320 с.

2. Прокопович, И. Е. Прикладная теория ползучести / И. Е. Прокопович, В. А. Зедгенидзе. — Москва : Стройиздат, 1980. — 239 с.

3. Вареник, А. С. О ползучести древесины / А. С. Вареник, К. А. Вареник // Современные проблемы науки и образования. — 2014. — № 2. — С. 88. — URL: http://www.science-education.ru/pdf/2014/2/429.pdf. (дата обращения: 19.03.2021).

4. Пятикрестовский, К. П. О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций / К. П. Пятикрестовский, В. И. Травуш // Academia. Архитектура и строительство. — 2015. — №. 2. — С. 115–119.

5. Pyatikrestovsky, K. P. Nonlinear analysis of statically indeterminate wooden structures and optimization of cross section dimensions of dome ribs / K. P. Pyatikrestovsky, B. S. Sokolov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2018. — Vol. 14 (4). — P. 130−139.

6. Development of structures from solid wood for objects of infrastructure / K. P. Pyatikrestovsky, V. I. Travush, A. A. Pogoreltsev, A. A. Klyukin // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2018. — Vol. 14 (1). — P. 145–154. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-1-145-154

7. Pyatikrestovsky, K. P. The Study of Complex Stress States of Elements Filling the Cells Between the Ribs of Wooden Large-Span Domes / K. P. Pyatikrestovsky, B. S. Sokolov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2019. — Vol. 15 (1). — P. 140−152.

8. Varenik, K. A. Boltzmann principle of superposition in the theory of wood creep for deformations in time / K. A. Varenik, A. S. Varenik, R. S. Sanzharovskij // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2018. — Vol. 441 (1). — 012057. — URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/441/1/012057/meta (accessed: 11.04.2021).

9. Short-term and long-term longitudinal load tests of wooden rods / K. A. Varenik, A. S. Varenik, A. V. Kirillov, M. V. Shuvalov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2020. — Vol. 939 (1). — 012080. — URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/939/1/012080/meta

10. Varenik, A. S. Model of stress-strain state of wooden rod under eccentric compression and transverse load / A. S. Varenik, K. A. Varenik // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2019. — Vol. 656 (1). — 012052. — URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/656/1/012052/pdf

11. The buckling of the physically nonlinear frame-rod structural systems / K. O. Dubrakova, S. V. Dubrakov, F. V. Altuhov, D. H. Galaeva // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2019. — Vol. 698 (2). — 022007. — http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/698/2/022007

12. Дмитриева, К. О. Вопросы устойчивости стержневых элементов конструктивных систем из древесины при силовом и средовом нагружении / К. О. Дмитриева // Строительство и реконструкция. — 2016. — № 4. — С. 14–18.

13. Клюева, Н. В. Вопросы устойчивости стержневых элементов конструктивных систем из древесины различных пород при силовом и средовом нагружении в условиях повышенной влажности / Н. В. Клюева, К. О. Дмитриева // Строительство и реконструкция. — 2016. — № 5. — С. 60–68.

14. Вареник, А. С. Длительная несущая способность деревянных конструкций / А. С. Вареник, К. А. Вареник // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2014. — № 2. — С. 23–30.

15. Пятикрестовский, К. П. К вопросу о выборе модулей упругости при расчете деревянных конструкций на прочность, устойчивость и по деформациям / К. П. Пятикрестовский // Строительная механика и расчет сооружений. — 2012. — № 6. — С. 73–79.

Поступила в редакцию 28.04.2021
Поступила после рецензирования 02.06.2021
Принята к публикации 04.06.2021

Об авторах:

Языев Сердар Батырович, доцент кафедры «Техническая механика», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, доцент, ScopusID: 57190970024, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7839-7381, russiangel@mail.ru

Андреев Владимир Игоревич, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов», ФГБОУ ВО «Московский государственный строительный университет», (129337, РФ, г. Москва, Ярославское ш., 26), доктор технических наук, профессор, академик РААСН, ResearcherID: T-9006-2017, ScopusID: 57198780961, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1057-4329, asv@mgsu.ru

Чепурненко Антон Сергеевич, доцент кафедры «Сопротивление материалов», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», (344002, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, ResearcherID: E-4692-2017, ScopusID: 56056531000, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9133-8546, anton_chepurnenk@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

С. Ю. Языев — формирование основной концепции, получение разрешающих уравнений, проведение расчетов, подготовка текста, формирование выводов; В. И. Андреев — научное руководство, анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов; А. С. Чепурненко — участие в разработке программы расчета, анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.